令和3年4月入学・令和2年秋期入学
埼玉大学大学院理工学研究科（博士前期課程）入試問題用紙

機械科学系専攻

必修科目

2020年8月20日(木) 13:00～14:30

注意事項
(Matters to be attended)

1. 試験開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけない．
（Do not open this booklet before the cue of examination is given.）

2. 本問題は必修問題である． 全ての問題に解答すること．
（Answer all questions given in this booklet.）

3. 印刷が不鮮明の場合は申し出ること．
（Call on if a printing is indistinct.）

4. 答案は必ず1問につき1枚の答案用紙に記入すること．
（Use each answer sheet for each question.）

5. 答案用紙の全てに必ず受験番号を記入すること．記入を忘れたり誤った記入をした答案は，0点（零点）となることがある．
（Write your application number in every answer sheet. If the application number is not written or incorrect, a score for the question might be null.）

6. 答案用紙の※印欄には記入しないこと．
（Do not write at a column ※ in the answer sheet.）

7. 試験を終了して退室するときは，答案用紙を裏返して机上に置き，この冊子は持ち帰ること．
（Leave the answer sheets face down on the desk and take this booklet with you when you exit the room.）

8. 答案用紙が足りない場合には，答案用紙の右下に「裏面に続く」と記載し，裏面を利用すること．

（If the answer sheet is insufficient in space, use a reverse side with writing [continue to reverse] at lower right of the front side.）

試験問題は，次ページからです．
（Questions are from the next page.）

$\boxed{1}$

(1) 次の関数$f(x, y)$について，以下の問いに答えよ。(Answer the following questions regarding the following function)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

a) 点(0,0)における$f(x, y)$の連続性を調べよ。(Examine the continuity of $f(x, y)$ at (0,0).)

b) 点(0,0)における$f(x, y)$の偏微分係数を, 定義に従って求めよ。(Find the partial differential coefficient at (0,0) of $f(x, y)$ according to the definition.)

(2) 関数$f(x, y) = x^3 + 6x^2y - 24y^2 - 16y^3$の極値を求めよ。(Find the extreme value of $f(x, y) = x^3 + 6x^2y - 24y^2 - 16y^3$.)

(3) $x + y = 6,\ y = 2x,\ y = x$で囲まれる領域を$D$とするとき, 領域$D$を図示し, 次の重積分を計算せよ。(Let D be the region enclosed by $x + y = 6,\ y = 2x,\ y = x$. Plot the region D and calculate the following multiple integral.)

$$\iint_D xy\, dxdy$$

2

(1) つぎの 3 つのベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$について考える．

Consider the following three vectors $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, and $\boldsymbol{a}_3$.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a) $\boldsymbol{a}_1$と$\boldsymbol{a}_2$の両方に直行し，かつ長さが 6 であるベクトル$\boldsymbol{a}_3$を全て求めよ．

Find all the vectors $\boldsymbol{a}_3$ which are orthogonal to both the vectors $\boldsymbol{a}_1$ and $\boldsymbol{a}_2$, and whose length becomes 6.

b) a)の解答を踏まえて，3 つのベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$からグラム・シュミットの正規直交化法を用いて正規直交基底$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$を求めよ．

Based on the answer in a), find orthonormal basis $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ from the three vectors $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, and $\boldsymbol{a}_3$ by means of the Gram-Schmidt orthonormalization.

(2) つぎの行列について考える．

Consider the following matrix $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) 行列$\boldsymbol{A}$の固有値を全て求めなさい．

Find all the eigenvalues of matrix $\boldsymbol{A}$.

b) 行列$\boldsymbol{A}$について，ケーリー・ハミルトンの定理を利用して次の式を計算せよ．

Regarding the matrix $\boldsymbol{A}$, calculate the following equation by utilizing the Cayley-Hamilton theorem.

$$\boldsymbol{A}^6 + 3\boldsymbol{A}^5 - 3\boldsymbol{A}^3 + 4\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}$$

$\boxed{3}$

以下の問いに答えなさい.

ただし，y は独立変数 x の関数であり，その導関数を $y' = \frac{dy}{dx}$ ，$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ，$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$と表す.

(Solve the problems below. y is a function of the independent variable x. The first, second and third derivatives are denoted by $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, and $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ respectively.)

[1] 次の微分方程式について，一般解を求めなさい.

(Find the general solution of the following differential equations.)

（1）$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0 \qquad (x \neq 0)$

（2）$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x$

（3）$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

[2] 次の微分方程式について，初期条件 $y(0) = \sqrt{3}$ を満たす特殊解を求めなさい.

(Find the particular solution of the following differential equation that satisfies the initial condition $y(0) = \sqrt{3}$.)

$$y' = -\frac{4x+2y}{2x+y-1}$$

試験問題は以上です.

（Questions are over.）