埼玉大学 大学院理工学研究科 博士前期課程 機械科学専攻 機械科学 PG

令和 5 年 4 月入学　第一次募集（2022 年 8 月実施）　入試問題（必修問題）

1

(1)　次の関数の極限を求めよ。(Find the limit of the following function.)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$$

(2)　ある曲線 : $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ （ただし，$a>0,\ 0\le t\le 2\pi$）とx軸とで囲まれる部分をx軸周りに回転してできる立体の体積を求めよ。(Find the volume of the object obtained by rotating the area bounded by the two curves: $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ and the *x*-axis around the *x*-axis. (Note that $a>0,\ 0\le t\le 2\pi$))

なお，この問題を解くにあたって，以下の Wallis の積分に関する公式を用いても構わない。(In answering the question, the following formula for the Wallis integral can be used.)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\cdots\times\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (\text{if } n \text{ is even})\\ 1(\text{if } n \text{ is odd}) & \end{cases}\qquad n\ge 1$$

(3)　次の不定積分を求めなさい。(Find the following indefinite integral.)

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx$$

2

つぎの数列の一般項 (x_n, y_n, z_n) を求める。

Find general term (x_n, y_n, z_n) in the following sequence.

$$x_{n+1} = -3x_n + 4y_n$$
$$y_{n+1} = -2x_n + 3y_n$$
$$z_{n+1} = -4x_n + 4y_n + z_n$$

$(n = 1, 2, 3 \ldots\ldots)$

以下の手順に従って解答せよ。

Answer in the following procedure.

(1) 以下に示す行列 **A** の固有値 λ_1, λ_2, λ_3（但し $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$）、および、これらの固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を求めよ。ただし、$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ はいずれも y 方向成分を 1 とし、$\mathbf{v}_3$ は z 方向成分を 1 とするものとする。

Find the eigenvalues λ_1, λ_2, λ_3 ($\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$) and the eigenvectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ of the matrix **A** shown below. $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ shall have a y-direction component of 1, and $\mathbf{v}_3$ shall have a z-direction component of 1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 行列 **A** を、1)で求めた固有ベクトルを用いて定義される行列 $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ を用いて対角化することを考える。対角化行列 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ を求めよ。

Diagonalizing matrix **A** using matrix $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ defined by the eigenvectors obtained in (1). Find the diagonalization matrix $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

(3) **A** のべき乗 $\mathbf{A}^n$ を求めよ。

Find the power of **A**, $\mathbf{A}^n$.

3

以下の問いに答えなさい.

ただし，y は独立変数 x の関数であり，その導関数を $y' = \frac{dy}{dx}$ ，$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ と表す.

(Solve the problems below. y is a function of the independent variable x. The first and second derivatives are denoted by $y' = \frac{dy}{dx}$ and $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ respectively.)

⑴ 次の微分方程式について，一般解を求めなさい.
(Find the general solution of the following differential equations.)

a）$y' + e^{x+y} = 0$

b）$xy' = 2y + x^3 e^x$

c）$y'' + y' - 12y = 6x^3 - \frac{1}{4}x$

⑵ 次の微分方程式について，初期条件 $y(0) = 1$ ，$y'(0) = 0$を満たす特殊解を求めなさい.
(Find the particular solution of the following differential equation that satisfies the initial condition $y(0) = 1$，$y'(0) = 0$)

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$