1

(1)　次の関数の極限を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(Let n be a natural number. Find the limit of the following function.)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^n}{2e^x}$$

(2)　次の定積分を求めよ．

(Find the following definite integral.)

(a) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} x\ln x\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(3)　$x \geq 0$ において，曲線 $y - x^{\frac{1}{2}} = 0$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を, 直線 $y = x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい.

(In $x \geq 0$, find the volume V of the solid formed by rotating the area bounded by the curve $y - x^{\frac{1}{2}} = 0$ and the line $y = x$ once around the line $y = x$.)

2

次の行列 $\mathbf{A}$ について考える．以下の問いに答えなさい．

(Consider the following matrix $\mathbf{A}$. Solve the problems below.)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) $a = 3$ のとき，逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ．

(Find the inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ when $a = 3$.)

(2) $a = 2$ のとき，以下の問いに答えなさい．

(Solve the problems below when $a = 2$.)

(a) $\mathbf{A}$ の固有値を全て求めなさい．

(Find the all eigenvalues of matrix $\mathbf{A}$.)

(b) (a) で求めた固有値 λ に対応する固有ベクトルをすべて求めなさい．すべての固有ベクトルの x 成分は 1 とする．

(Find the all eigenvectors corresponding to the eigenvalues found in a), when value of the all eigenvectors in x component is 1.)

(c) 行列 $\mathbf{A}$ について，ケーリー・ハミルトンの定理を利用して次の式を計算しなさい．

(Regarding the matrix $\mathbf{A}$, calculate the following expression by utilizing the Cayley-Hamilton theorem.)

$$\mathbf{A}^4 - \mathbf{A}^3 - 4\mathbf{A}^2$$

3

以下の問いに答えなさい．ただし，y は独立変数 x の関数であり，その導関数を $y' = \frac{dy}{dx}$ ，$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ，$y'''' = \frac{d^4y}{dx^4}$ と表す．

(Solve the problems below. y is a function of the independent variable x. The first, second and fourth derivatives are denoted by $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ and $y'''' = \frac{d^4y}{dx^4}$ respectively.)

(1) 次の微分方程式について，一般解を求めなさい．
(Find the general solution of the following differential equations.)

(a) $y' + 4\sqrt{y} = 0$

(b) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x} + 4\cos x$

(c) $y'''' + 5y'' + 4y = 0$

(2) 次の微分方程式について，初期条件 $y(0) = 0$ を満たす特殊解を求め，$x \to \infty$ のときの y の極限値 $y_\infty = \lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めなさい．

(Find the particular solution of the following differential equation that satisfies the initial condition $y(0) = 0$, and determine the limiting value of y as $x \to \infty$, i.e., $y_\infty = \lim_{x\to\infty} y(x)$.)

$$y' + 2y^2 + y = 1$$